Πραγματική Ανάλυση

11-12-17

Πρόταση: Έστω X να είναι ένα σύνολο και έστω $f_n: X \to \mathbb{R}$, να είναι συναρτήσεις.
Τότε ισχύουν τα εξής:

1) (Κριτήριο Cauchy)
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\forall \varepsilon$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει
$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

2) (Κριτήριο Weierstrass)
Αν ισχύει ότι:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x)| < +\infty$$, τότε η
$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη

1) Για το αντίστροφο

Υποθέτουμε ότι ισχύει το κριτήριο Cauchy και θα δείξουμε ότι: η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Αρκεί, ν.δ.ο. η ακολουθία

(S_n) των μερικών αθροισμάτων της (f_n) είναι ομοιόμορφη, βασική. Με τον ορισμό της ομοιόμορφης βασικής.

Έστω $\varepsilon_0 > 0$. Από το κριτήριο Cauchy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$. για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ισχύει:
$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon_0, \quad \forall x \in X.$$
Θα ισχύει και το n_0+1.

Έστω τυχόν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0+1$. Έστω τυχόν $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Θέτουμε $m = n+k$. Τότε, $m \geq n \geq n_0+1$. Από το κριτήριο Cauchy για τα n και k παίρνουμε:
$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon_0 \quad \forall x \in X$$
$$\Leftrightarrow |(f_1 + f_2 + \dots + f_{n+k}(x)) - (f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x))| < \varepsilon_0$$
$$\forall x \in X$$

$\Leftrightarrow |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon_0$, $\forall x \in X$, όπου $n \geq n_0 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n-1 \geq n_0$ και $m \geq n \Rightarrow m > n-1$

Δηλαδή, δείξαμε ότι $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ με $m > n-1 \geq n_0$ έχουμε:
$|S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon_0, \forall x \in X$
Ας θέσουμε $v = n-1$.
$\forall m, v \in \mathbb{N}$ $m \geq v \geq n_0$ έχουμε $|S_m(x) - S_v(x)| < \varepsilon_0, \forall x \in X$
Αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$. Άρα, η (S_n) είναι ομοιόμορφα βασική (από τον ορισμό). Άρα, αφού η (S_n) είναι ομοιόμορφα βασική, έπεται (από πρόταση) ότι η (S_n) συγκλίνει ομοιόμορφα, που ακριβώς σημαίνει ότι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα.}$$

2) Θέτουμε $a_1 := \sup_{x \in X} |f_1(x)|$, $a_2 = \sup_{x \in X} |f_1(x)| + \sup_{x \in X} |f_2(x)|$

$a_n = \sup_{x \in X} |f_1(x)| + \dots + \sup_{x \in X} |f_n(x)|$

Άρα, η (a_n) συγκλίνει. Άρα, η (a_n) είναι βασική.
Έστω $\varepsilon_0 > 0$. Αφού, η (a_n) είναι βασική έπεται ότι $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}$ με $m, n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon_0$.
Θα ισχύει και για το n_0+1. Παίρνω $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$
Τότε $m = n + k$ για $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$
Άρα, $|a_m - a_{n-1}| < \varepsilon_0$, γιατί $\left.\begin{array}{l} m \geq n > n_0 \\ n \geq n_0+1 \Rightarrow n-1 \geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x)| + \sup_{x \in X} |f_{n+1}(x)| + \dots + \sup_{x \in X} |f_{n+k}(x)| < \varepsilon_0$ (1)

Όμως
$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| \overset{\text{τριγωνική ανισότητα}}{\leq} |f_n(x)| + \dots + |f_{n+k}(x)|$
$\leq \sup_{x \in X} |f_n(x)| + \dots + \sup_{x \in X} |f_{n+k}(x)|$ (2)

Από τις (1), (2) $\Rightarrow |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon_0$
$\forall x \in X$

Αφού αυτό ισχύει, $\forall \varepsilon>0$ ισχύει το κριτήριο Cauchy. Άρα, από το προηγούμενο η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω X να είναι σύνολο και έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις για $n=1,2,\dots$ Έστω (S_n) να είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της (f_n). Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Αυτό σημαίνει εξ' ορισμού ότι η ακολουθία (S_n) συγκλίνει ομοιόμορφα. Έστω ότι $S_n \xrightarrow{u} f$. Η f είναι μοναδική. Άρα $S_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow S_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ από γνωστή πρόταση. Αυτό σημαίνει ότι: $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, $\forall x \in X$

Άρα, $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} f_v(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ①

Αλλά,
$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ (εξ' ορισμού) } ②$$

Από τις σχέσεις ①, ② έπεται ότι: $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in X$

<u>Ομοιόμορφη συνέχεια και ολοκληρώματα</u>

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann ολοκληρώσιμη. Άρα $\exists\, m>0$:
f φραγμένη

$|f(x)| \le m$, $\forall x \in [a,b]$

Τότε: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le m(b-a)$

α. Υπενθύμιση

- Έστω Π να είναι ένα κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{n_0}$.
- Έστω $f : \Pi \to \mathbb{R}$ να είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη

συνάρτηση. Έστω $M \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \Pi$
Τότε ισχύει: με $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0})$

$$\left| \int_{\Pi} f(x)\,dx \right| \leq M \cdot V(\Pi)$$, όπου

αν $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{n_0}, b_{n_0}]$ ισχύει
$V(\Pi) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_{n_0} - a_{n_0}) = m(\Pi)$

<u>Πρόταση</u>: Έστω Π να είναι ένα κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{n_0}$.
Έστω $f_n, f : \Pi \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ να είναι Riemann-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{u} f$
Τότε ισχύει:

$$\int_{\Pi} f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Pi} f_n(x)\,dx$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\left| \int_{\Pi} f_n(x)\,dx - \int_{\Pi} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{\Pi} (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \quad (1)$$

Αφού $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \sup_{x \in \Pi} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, από πρό- (2)
ταση που έχουμε δείξει.
Από την προηγούμενη ανισότητα η f_n, f είναι Riemann-ολοκληρώσιμες για $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \int_{\Pi} (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \sup_{x \in \Pi} |f_n(x) - f(x)|\, V(\Pi) \quad (3)$$

όπου πήραμε σαν $M = \sup_{x \in \Pi} |f_n(x) - f(x)|$

Αφού, $\sup_{x \in \Pi} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \Rightarrow V(\Pi) \sup_{x \in \Pi} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ (4)

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι:

$$\left| \int_{\Pi} (f_n(x) - f(x))\, dx \right| \to 0 \Rightarrow \int_{\Pi} (f_n(x) - f(x))\, dx \to 0$$

$|x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_n \to 0$

σχόλιο!

$$\Rightarrow \int_{\Pi} f_n(x)\, dx - \int_{\Pi} f(x)\, dx \to 0$$

Άρα,

$$\int_{\Pi} f_n(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Pi} f(x)\, dx$$

∎